***0. ВВЕДЕНИЕ (можно пропустить)***

*Отношение эквивалентности*

Говорят, что на непустом множестве  задано *отношение *, если выбрано подмножество (обозначим его тем же символом) . При этом, если , то говорят, что элемент  находится в отношении  с элементом  и пишут .

Если

*  имеем , то отношение  называется рефлексивным,
* , то отношение  называется симметричным,
* , то отношение  называется транзитивным.

Отношение  называется *отношением эквивалентности*, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Если на  задано отношение эквивалентности , то любые два элемента этого множества либо эквивалентны, либо не эквивалентны. Подмножества множества , состоящие из всех эквивалентных между собой элементов, называются классами эквивалентности. Семейство классов эквивалентности определяет *разбиение* множества : классы эквивалентности не пусты, не пересекаются, и их объединение совпадает с . Это, в частности, можно трактовать так: выбрав отношение эквивалентности, мы определяем соответствующую классификацию элементов в  (разбиение на классы эквивалентности). Заметим, что класс однозначно определяется своим представителем.

Верно и обратное: если на  задано разбиение, то естественным образом строится отношение эквивалентности

,

для которого классы эквивалентности будут совпадать с элементами разбиения.

Примерами отношений эквивалентности могут быть отношения подобия и равенства треугольников на евклидовой плоскости. В первом случае эквивалентные треугольники называют подобными, во втором – равными.

*О связи пространств*  и .

Пусть  ‑ -мерное точечное евклидово пространство, являющееся основным объектом изучения, как школьной геометрии, так и геометрического курса в 1-ом семестре (если  ‑ мы имеем дело с плоскостью, если  ‑ речь идет о пространстве, есть определенные основания прямую обозначить ).

Для изучения фигур в этом пространстве мы воспользовались еще одним искусственно созданным множеством , состоящим из векторов (в дальнейшем будем называть его векторным пространством, связанным с точечным пространством ). Напомним, как оно строилось.

Этап 1. Каждой паре точек  из  ставился в соответствие направленный отрезок .

Этап 2. На множестве направленных отрезков определялось отношение эквивалентности. Так появлялись классы эквивалентных направленных отрезков, при этом каждый направленный отрезок  однозначно определял класс эквивалентных направленных отрезков , представителем которого этот отрезок являлся.

Этап 3. Показывалось, что классы эквивалентных направленных отрезков можно складывать, умножать на числа и что эти операции обладают рядом свойств, а именно:

1) сложение ассоциативно,

2) существует нейтральный элемент, то есть такой класс , что для любого класса верно равенство ,

3) для любого класса  существует класс  такой, что  (в этом случае класс  обозначают символом () и называют обратным для класса ),

4) для любых классов  и  верно равенство  (свойство коммутативности),

5) для любых двух чисел  и любого класса  верно равенство

,

6) для любого класса  верно равенство ,

7) для любого числа  и для любых классов  и  верно равенство

,

8) для любых двух чисел  и для любого класса  верно равенство

.

Множество классов эквивалентных направленных отрезков с заданными на нем операциями сложения и умножения на числа мы назвали пространством векторов , а его элементы ‑ векторами.

Складывать и умножать на числа можно элементы разных множеств. Например, столбцы из , -матрицы, заданные на интервале непрерывные функции, полиномы. Список множеств, на которых можно задать сложение и умножение на числа, обладающие свойствами 1-8 из этапа 3 можно продолжать. Но здесь важно другое: вывод о том, что это лишь примеры (модели) одной и той же математической конструкции (структуры) – ***векторного пространства.***

Связь между пространствами  и  осуществляет отображение

,

где  ‑ вектор, определяемый направленным отрезком . Это отображение обладает двумя замечательными свойствами:

1)  такая, что 

(в других обозначениях: ),

2)  имеем 

(в других обозначениях ).

***Упражнение 0.1.*** Доказать свойства 1-2 отображения .

***Упражнение 0.2.*** Доказать свойства 1-8 (см. этап 3).

***О координатном методе в пространствах*  *и* .**

Система векторов  из  называется *линейно зависимой*, если один из векторов этой системы можно представить в виде линейной комбинации остальных векторов этой системы. В противном случае система векторов называется *линейно независимой*. Система, состоящая из одного ненулевого вектора, очевидно, является линейно независимой. Максимальная линейно независимая упорядоченная система векторов называется *базисом* векторного пространства . Для  базисом  служит любой отличный от нуля вектор из . Для плоскости (при ) базисом  будет любая упорядоченная пара неколлинеарных векторов из . В качестве базиса в  можно взять любую упорядоченную тройку некомпланарных векторов.

Любой вектор  пространства  можно представить в виде линейной комбинации векторов базиса  (в этом случае говорят, что базис является *системой образующих*) и притом единственным образом. Коэффициент  при -том базисном векторе в этой линейной комбинации называют *-той координатой вектора * в базисе . Столбец координат вектора ** в заданном базисе будем обозначать символом .

***Упражнение 0.3.*** Базис есть минимальная система образующих векторного пространства. Доказать.

Определим репер как набор , где  ‑ базис. *Координаты точки * ‑ это координаты вектора  в базисе . Столбец координат точки  в заданном репере будем обозначать символом .

Полезность этой простой конструкции в возможности подмены объекта изучения. Вместо точек можно изучать наборы чисел (координаты), вместо фигур – множества наборов чисел, которые, как известно, можно задавать уравнениями.

Но здесь встает *важнейший вопрос*, без ответа на который дальнейшая работа бессмысленна. Координаты определяются выбором базиса или репера (так, в частности, для любой наперед заданной точки можно выбрать репер такой, что координаты этой точки примут любые наперед заданные значения). Но выбор репера осуществляет человек. Откуда уверенность, что два разных человека, выбирая различные реперы и изучая свойства фигуры при помощи координат, получат одни и те же результаты?

Для ответа на этот вопрос надо изучить как связаны взятые в различных реперах (базисах) координаты точек (векторов) и доказать, что полученные свойства сохранятся при замене одних координат другими (инвариантность относительно замены координат).

***0.4. О замене координат в*  *и* .**

Рассуждения проведем для .

*I. Замена координат в пространстве векторов .*

Пусть  и  ‑ два базиса (назовем их *старый* и *новый* соответственно) в ** и

,



‑ разложения вектора  по этим базисам.

Очевидно



Выразим векторы нового базиса через векторы старого (это возможно!):

**

или в матричном виде

,

гдематрица ** называется матрицей перехода от старого базиса к новому.

Подставляя в и имея ввиду единственность разложения по базису, получаем

,

где .

*II. Замена координат в пространстве .*

Пусть  и  два репера в **, которые мы назовем старый и новый соответственно. Пусть также  ‑ координатные столбцы точки  в старом и новом реперах. Это означает, что  и . В силу свойства 2) отображения имеем

.

Представим векторы в формуле в виде линейных комбинаций векторов базиса :

,

где  ‑ координатный столбец вектора  в базисе  или, что то же самое, координатный столбец точки  в репере . Учитывая единственность разложения по базису, получаем:

.

Формулу можно переписать в виде

.

Здесь индекс внизу справа у квадратной скобки указывает репер, в котором берутся координаты.

***0.5. Координатное выражение отображений в*  *и* .**

Рассуждения проведем для .

Пусть  ‑ отображение. Зафиксируем в  репер . Этот репер задает биективное, а значит обратимое, отображение (обозначим его той же буквой) . В дальнейшем будем использовать обозначения:

 ‑ столбец из , совпадающий с координатным столбцом  точки ,

 ‑ точка в , координатный столбец  которой совпадает со столбцом .

***Определение 0.1.*** Отображение



называется координатным выражением отображения  (в репере ).

Координатное выражение – это отображение, коммутативно замыкающее диаграмму

.

















Очевидно, для любого отображения  корректно определяется отображение  формулой . При этом  для  будет координатным выражением.

Заметим, что задание отображения вида  эквивалентно заданию трех (скалярных) отображений



В дальнейшем, когда это не будет вызывать затруднений, координатное выражение отображения будем обозначать тем же символом, что и само отображение (без волны).

***Пример 5.1.*** Координатное выражение

А) *поворота вокруг точки  на угол * будет иметь вид



Б) *параллельного переноса на вектор * с координатами ** будет иметь вид



Координатное выражение гомотетии в евклидовом пространстве

Координатное выражение подобия в евклидовом пространстве

Координатные выражения проекций на оси, координатные плоскости

Координатное выражение гомотетии с центром в произвольной точке

Координатное выражение параллельного переноса в различных реперах

***Глава 1. Аффинные пространства.***

***1.1. Определение аффинного пространства.***

Пусть  ‑ непустое множество, элементы которого будем называть точками.

***Определение 1.*** Говорят, что на множестве  задана *структура -мерного аффинного пространства*, если указано -мерное векторное пространство  и задано отображение

,

обладающее свойствами:

единственная точка  такая, что 

 ‑ аксиома треугольника.

Множество  со структурой -мерного аффинного пространства обозначают  и называют *аффинным пространством*.

В дальнейшем будем считать, что  векторное пространство над полем вещественных чисел .

Говорят, что точка  из получается при *откладывании вектора*  от точки  и пишут . Поэтому условие называют аксиомой откладывания вектора от точки.

Будем использовать также обозначение , так что .

***Пример 1.1.*** Пусть ,  со стандартными операциями сложения столбцов и умножения столбцов на числа. Зададим отображение . Очевидно, свойства и выполняются. Это означает, что с помощью отображения на  определяется структура -мерного аффинного пространства. Таким образом, на  можно определить как структуру векторного пространства, так и структуру аффинного пространства.

***Упражнение 1.1.*** Доказать, что структуру -мерного аффинного пространства можно задать на любом -мерном векторном пространстве. Наоборот: на любом -мерном аффинном пространстве можно задать структуру -мерного векторного пространства.

***1.2. Координаты точек в аффинном пространстве.***

Пусть  ‑ базис векторного пространства . С помощью базиса  зададим отображение (обозначим его той же буквой )



где элементы столбца  определяются равенством , то есть являются координатами вектора  в базисе .

Пусть теперь . Упорядоченный набор  будем называть ***репером*** в .

С помощью репера  в  зададим отображение (обозначим его той же буквой )

,

где элементы столбца  определяются равенством .

Столбец  будем называть *координатным столбцом* точки  в репере , а число  (элемент столбца, стоящий в -той позиции) будем называть ***-той координатой точки*** в этом репере. Таким образом, координаты точки  в репере  ‑ это коэффициенты разложения вектора  по базису  или, что то же самое, координаты вектора  в базисе . Координаты вектора  в базисе  будем обозначать символом . Если базис или репер известен из контекста, то нижний правый индекс у квадратных скобок будем опускать (то есть будем писать , ). Используя введенные обозначения, можно записать:



и



*Некоторые свойства отображений и .*

1. Отображения  и  биективны. Для   ‑ вектор  с координатным столбцом  в базисе , а  ‑ точка  с координатным столбцом  в репере .
2.  (координаты линейной комбинации векторов равны линейным комбинациям соответствующих координат).
3. .
4.  (здесь следует иметь в виду, что знак «+» в Л.Ч. означает откладывание вектора от точки, а в П.Ч. – обычное сложение столбцов).
5.  и  импликация  истинна (еще одна форма записи аксиомы треугольника).

***Упражнение 2.1.*** Доказать свойства 1-5.

***1.3. Преобразование координат точек при замене репера.***

Пусть  и  ‑ два репера в аффинном пространстве .

Вспомним, что  имеет место формула , где  ‑ матрица перехода от базиса  к базису . Столбцами матрицы  являются координатные столбцы векторов базиса в базисе .



*Разложим вектор  по базисам  и :*

,

*где  и  ‑ координатные столбцы вектора  в этих базисах соответственно.*

*Пусть*

**

*разложение векторов базиса  (назовем его новым) по базису  (назовем его старым). Формулы можно переписать в матричном виде:*

*,*

*где  и называется матрицей перехода от старого базиса к новому.*

*Подставляя в , получаем*

*,*

*Откуда в силу единственности разложения по базису получаем*

**

Пусть . Тогда

.

Используя , получаем

,

откуда



или



Опять же в силе единственности разложения по базису получаем

.

Или

